Έστω η εξίσωση SOS

$(\epsilon): \ y' + py = q \ , \ x \geq 0 \ , \ p, q \in C^1([0,+\infty))$

Υποθέτουμε ότι $\exists x_0 \geq 0$ και $\mu > 0$ έτσι ώστε

$p(x) \geq \mu \ , \ \forall x \geq x_0$ καθώς $\lim_{x \to \infty} q(x) = 0$

ΝΔΟ όλες οι λύσεις της (ϵ) τείνουν στο 0 όταν $x \to \infty$

ΛΥΣΗ

Έχουμε, τη γραμμική διαφορική εξίσωση (ϵ) α' τάξης:

$$y' + py = q \Rightarrow y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \ , \ \forall x \geq 0$$

$$y'(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx} + p(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \cdot y(x) = q(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(\underbrace{y(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}}_{f'(x)}\Big)' = q(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx} = \int_{x_0}^{x} q(s)\, e^{\int_{x_0}^{s} p(u)\,du}\, ds + y(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \left(\int_{x_0}^{x} q(s)\, e^{\int_{x_0}^{s} p(u)\,du}\, ds + y(x_0) \right) , \ x \geq 0$$

Αρκεί, νδο $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$.

Επίσης, έχουμε ότι:

$p(x) \geq \mu \ , \ \forall x \in [x_0, +\infty)$

Άλλα, περιορισμένοι στο διάστημα $[x_0, x]$:

$$\int_{x_0}^{x} \mu\, ds \leq \int_{x_0}^{x} p(s)\,ds \Rightarrow \mu(x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x} p(s)\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(x_0 - x) \geq -\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds \Rightarrow e^{\mu(x_0 - x)} \geq e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds} \geq 0$$

και λόγω ότι $\lim_{x \to \infty} e^{\mu(x_0 - x)} = \lim_{x \to \infty} e^{\mu x_0} \cdot e^{-\mu x} = 0$

Επομένως, από θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων

$$\lim_{x \to \infty} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} y(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds} = 0$$

Τώρα, στη σχέση που μας δίνει τις λύσεις της (ε) μας μένει νδο:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\cdot\int_{x_0}^{x} q(s)\cdot e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du}ds\right)=0.$$

Δηλαδή, ότι:

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{\int_{x_0}^{x} q(s)\cdot e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du}ds}{e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}}\right)}_{H(x)}=0.$$

<u>Προσοχή!</u>

<u>Δεν</u> μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hôpital. διότι δεν πληρούνται όλα τα κριτήρια του. Δηλαδή, δεν γνωρίζουμε εάν η συνάρτηση q είναι ≥ 0 ή ≤ 0.
Συνεπώς, θα εξετάσουμε για την $|H(x)|$ ώστε:

$$\lim_{x\to\infty} H(x)=0 \iff \lim_{x\to\infty}|H(x)|=0.$$

Άρα,

$$0\leq |H(x)| = \frac{\left|\int_{x_0}^{x} q(s)\cdot e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du}ds\right|}{e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}} \leq$$

$$\leq \frac{\int_{x_0}^{x} |q(s)|\cdot e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du}ds}{e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}},$$ όπου η $f(x)=\int_{x_0}^{x}|q(s)|\cdot e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du}\geq 0$

Άρα, η $f\uparrow$ στο $[x_0,+\infty)$.

- Αν $\lim_{x\to\infty} f(x)=k\in\mathbb{R}$, τότε $0\leq \frac{f(x)}{e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}} \leq \frac{f(x)}{e^{-\mu(x-x_0)}} \longrightarrow 0$

  Άρα, το $\lim_{x\to\infty}|H(x)|=0$

- Αν $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, τότε από κανόνα του L'Hôpital $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$0\leq \frac{f'(x)}{\left(e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\right)'} = \frac{|q(x)|\cdot \cancel{e^{\int_{x_0}^{x} p(u)du}}}{\cancel{e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}}\cdot p(s)} = \frac{|q(x)|}{p(s)} \overset{\text{Υπόθεση}}{\leq} \frac{|q(x)|}{\mu} \longrightarrow 0$$

Άρα, το $\lim_{x\to\infty}|H(x)|=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} H(x)=0$